

Rappel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ f, g dérivables en x_0

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ g dérivable en $f(x_0)$, f dérivable en x_0

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin x}$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$
sur leurs domaines.

Ex. $\left(\frac{\left(\log \frac{1}{x^2}\right) e^x + \frac{1}{\log(\sin x^2)}}{3x^4 - 2x^3 + x + 1} \right)' =$

$(e^x)' = e^x$
 $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{\left(x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) e^x + \left(\log \frac{1}{x^2}\right) e^x - \frac{1}{(\log(\sin x^2))^2} \frac{(\cos x^2) \cdot 2x}{\sin x^2} \right) (3x^4 - 2x^3 + x + 1) - (12x^3 - 6x^2 + 1) \left(\left(\log \frac{1}{x^2}\right) e^x + \frac{1}{\log(\sin x^2)} \right)}{(3x^4 - 2x^3 + x + 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \left(-\frac{2}{x} + \log \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2x \cos x^2}{(\log(\sin x^2))^2 \sin x^2}}{3x^4 - 2x^3 + x + 1} - \frac{(12x^3 - 6x^2 + 1) \left(\left(\log \frac{1}{x^2}\right) e^x + \frac{1}{\log(\sin x^2)} \right)}{(3x^4 - 2x^3 + x + 1)^2}.$$

Calcul des dérivées



-156-

Dérivée de la fonction réciproque.

Proposition. Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction bijective continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: F \rightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ où } y_0 = f(x_0) \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dém: f est continue et bijective sur $I \Rightarrow f^{-1}$ est continue et bijective

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \left[\begin{array}{l} \text{changement de variable} \\ x_0 = f^{-1}(y_0), x = f^{-1}(y) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} f^{-1}(y) \text{ est continue en } y_0 \\ \text{Si } y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = [f'(x_0) \neq 0] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Corollaire. Si $f: I \rightarrow F$ et $f^{-1}: F \rightarrow I$ sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur, alors pour tout x à l'intérieur de F , tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ex. Arccos: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\cos x: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ $y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$(\text{Arccos } x)' = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos } x)} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos } x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos } x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin y = \pm \sqrt{1-\cos^2 y}$; $0 \leq \text{Arccos } x \leq \pi$  $\Rightarrow \sin(\text{Arccos } x) > 0 \Rightarrow$ il faut choisir „+“

Ex. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{\overbrace{x-x_0}^t} - 1}{\underbrace{x-x_0}_{t \rightarrow 0}} \stackrel{t=x-x_0}{=} e^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \stackrel{t \rightarrow 0}{=} e^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \text{ est continue } \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ est continue et strictement monotone $\Rightarrow$ ^{cours 18} $f(\text{intervalle ouvert}) = \text{intervalle ouvert}$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f$ est surjective

$f(x) = e^x$ est continue, bijective, monotone ^{cours 18} $\Rightarrow \exists f^{-1}(x) = \log x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ⁻¹⁵⁸⁻
est continue, bijective, monotone

Ex. $f^{-1}(x) = \log x$; $f(y) = e^y$, $x > 0$.

$$(\log x)' = \left(\frac{1}{(e^y)'} \right) \Big|_{y=\log x} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\log x} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0..$$

$$\Rightarrow \boxed{(\log x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.}$$

Remarque. On peut définir les fonctions $a^x \stackrel{\text{d'it}}{=} e^{x \log a}$ $\forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
 $\Rightarrow y = e^{x \log a} \Leftrightarrow \log y = x \log a \Rightarrow x = \frac{\log y}{\log a} \stackrel{\text{d'it}}{=} \log_a y$ $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, a > 0, a \neq 1.$

$$\Rightarrow \underline{(a^x)'} = \log a \cdot e^{x \log a} = \underline{a^x \log a}$$

$$\Rightarrow \underline{(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}} \quad (\text{Voir Série 10})$$

La dérivée logarithmique.

-159-

Ex. $(x^2+1)^{\sin x} = f(x) \Rightarrow f'(x) = ?$

Soit $f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} \Rightarrow f'(x) = ?$

$$f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} \stackrel{\text{(dif)}}{=} e^{f_2(x) \log f_1(x)}$$

$$\begin{aligned} (f_1(x)^{f_2(x)})' &= (e^{f_2(x) \log f_1(x)})' = \underbrace{e^{f_2(x) \log f_1(x)}}_{f_1(x)^{f_2(x)}} \underbrace{\left(f_2'(x) \log f_1(x) + f_2(x) \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \right)}_{(\log f_1(x)^{f_2(x)})'} = \\ &= (f_1(x)^{f_2(x)}) (\log f_1(x)^{f_2(x)})' \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{(f(x))' = f(x) (\log f(x))'}$ si $\log f(x)$ est bien définie : $(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ex. $((x^2+1)^{\sin x})' = ((x^2+1)^{\sin x}) \cdot \left(\cos x \cdot \log(x^2+1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1} \right)$

$$\log(x^2+1)^{\sin x} = (\sin x) \log(x^2+1)$$

Fonctions hyperboliques

Déf. $\text{sh}x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ impaire $\forall x \in \mathbb{R}$

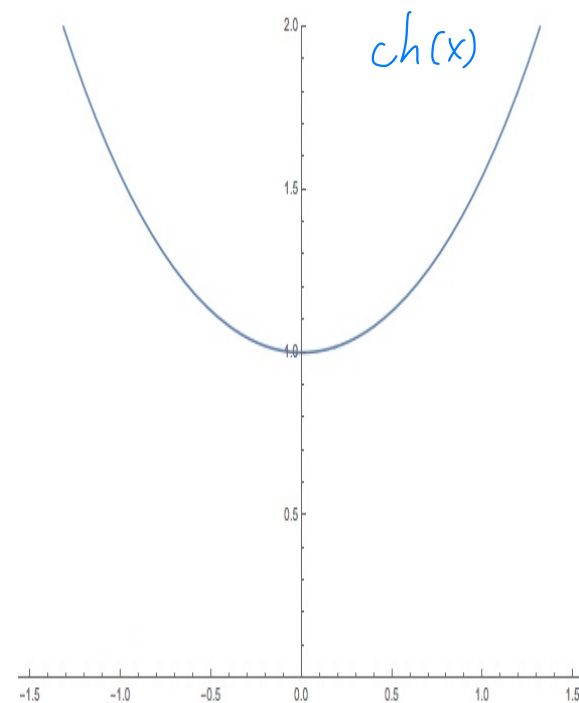
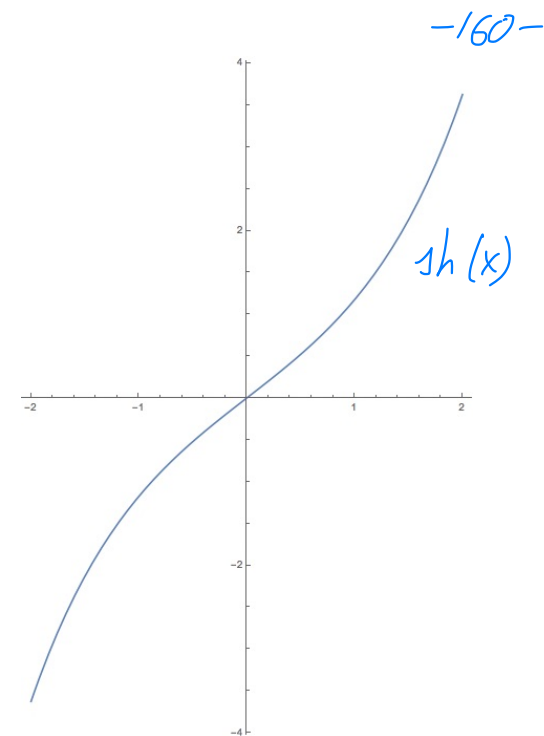
$\text{ch}x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ paire $\forall x \in \mathbb{R}$

(Rappel: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$)

$$(\text{sh}x)' = \text{ch}x ; (\text{ch}x)' = \text{sh}x.$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\text{th}x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 < \text{th}x < 1$$

$$\text{coth}x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

On peut d\'efinir les fonctions r\'eciproques :

„Argument sinus hyperbolique“, etc...

$$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Bijective

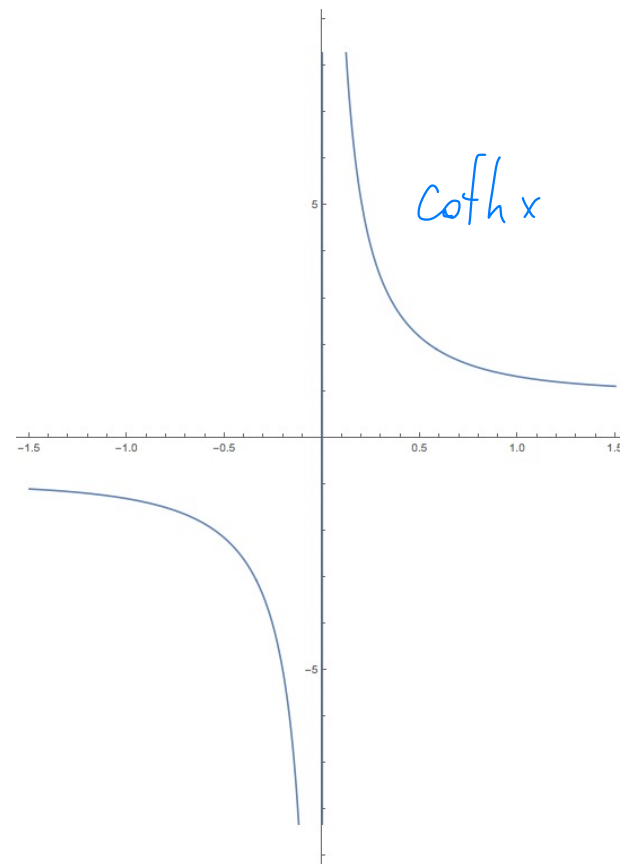
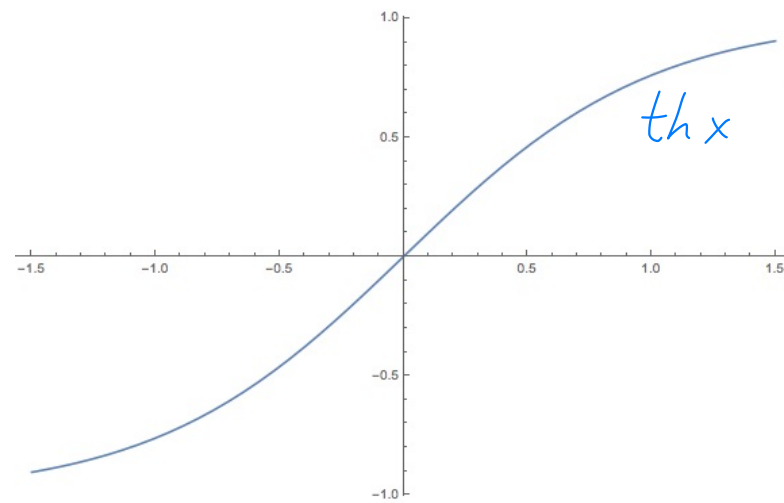
$$y = \text{sh}x \Leftrightarrow x = \text{Argsh}y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(\text{Argsh}y)' = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}y)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}y)} =$$

$$[\text{On a : } \text{ch}x = +\sqrt{1+\text{sh}^2} \text{ puisque } \text{ch}x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2(\text{Argsh}y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Pour les autres fonctions voir [DZ § 6.5, 6.6].



Déf $f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$ dérivée d'ordre 2.

$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'$ dérivée d'ordre n . Notation : $f^{(n)}(x)$

Ex. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \dots f^{(n)}(x) = n!, f^{(n+1)}(x) = 0.$
 (Exercice: par récurrence) $f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \dots$

Déf. $f: E \rightarrow F$ est n fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre n .

Déf. $f: E \rightarrow F$ est de classe $C^n(E)$ si elle admet une dérivée d'ordre n qui est continue sur E .
 „ n fois continûment dérivable ”

Ex. $f(x) = \sin x$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\sin x$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

Polynôme $\in C^\infty(\mathbb{R})$

$f(x) = |x| \in C^0(\mathbb{R})$ seulement continue

§ 5.3. Théorème des accroissements finis.

-163-

Proposition. Si $f: E \rightarrow F$ dérivable en $x_0 \in E$, telle que f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

Dém: Soit $f(x_0)$ - un maximum local de $f(x)$. Alors $f(x_0) \geq f(x) \forall x$ dans un voisinage de x_0 .

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} = 0.$$



Remarque. La réciproque est faussée : $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$
 $\Rightarrow f'(x) = 3x^2|_{x=0} = 0$, mais $f(x)$ n'a pas d'extremum local en $x=0$.

Déf. Si $f: E \rightarrow F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f .

Les point d'extrema d'une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont parmi les suivants:

- (1) les points stationnaires : $f'(x_0) = 0$
- (2) les points $x \in]a, b[$ où $f'(x)$ n'existe pas
- (3) les bornes $x = a$ et $x = b$.

Théorème de Rolle.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$, telle que

(1) $f: [a, b] \rightarrow F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a, b[$.

(3) $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dém. (1) Si $f: [a, b] \rightarrow F$ est constante

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \forall x_0 \in]a, b[.$$

(2) Si $f: [a, b] \rightarrow F$ n'est pas constante.

$$\Rightarrow \exists z_1 \neq z_2 \in [a, b]: f(z_1) = \min_{[a, b]} f(x)$$

$$f(z_2) = \max_{[a, b]} f(x) \quad ; \quad f(z_1) \neq f(z_2)$$

Puisque $f(a) = f(b) \Rightarrow$ au moins un entre z_1, z_2 est dans $]a, b[$

Supposons que $z_1 \in]a, b[$ $\Rightarrow f'(z_1) = 0$ par la propriété d'extremum local.
Puisque f est dérivable sur $]a, b[$.

$$\Rightarrow \text{On pose } c = z_1 \Rightarrow f'(c) = 0$$

